



1. α) Να υπολογίσετε τα:

(i)  $\mathcal{L}^{-1}\{sF''(s)\}$ , (ii)  $\mathcal{L}\left\{\sin t H\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$ , (iii)  $\mathcal{L}\left\{\frac{1 - \cos t}{t^2}\right\}$ .

β) Να λύσετε την εξίσωση διαφορών  $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 3a_n = 0$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ .

2. Δίνεται η ολοκληρωτική εξίσωση  $y(t) = f(t) + \lambda \int_{-1}^1 (ts + t^2 s^2) ds$ .

(i) Να βρείτε τη λύση με τη βοήθεια του επιλύοντα πυρήνα.

(ii) Να βρείτε τις λύσεις της ολοκληρωτικής εξίσωσης αν  $f(t) = At + B$  για όλες τις τιμές της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R}$  και όλες τις τιμές των παραμέτρων  $A$  και  $B$ .

3. Να αναγάγετε την ολοκληρωτική εξίσωση  $y(t) = \lambda \int_0^\pi \sin|t - s| y(s) ds$  σε μια διαφορική εξίσωση, και να βρείτε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις.

4. α) (i) Αν  $f$  είναι μια συνάρτηση συνεχής και εκθετικής τάξης, να λύσετε την ολοκληρωτική εξίσωση:  $y(t) = f(t) + \lambda \int_0^t \sin(t - s)y(s) ds$ .

(ii) Να λύσετε την ολοκληρωτική εξίσωση  $y(t) = g(t) + \lambda \int_0^{2\pi} \cos(t + s) ds$  και να βρείτε συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί η  $g$  ώστε η εξίσωση να έχει λύση όταν το  $\lambda$  είναι ιδιοτιμή. Να βρείτε την γενική λύση αν  $g(t) = \sin t$ , θεωρώντας όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

β) Να λύσετε το πρόβλημα συνοριακών τιμών: 
$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{4}y = t, & 0 \leq t \leq \pi \\ y(0) = 0, & y(\pi) = 1. \end{cases}$$

με την βοήθεια της συνάρτησης Green

5. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Hilbert-Schmidt να λύσετε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(t) = \sin t + \lambda \int_0^\pi \sin(t + s)y(s) ds.$$